Lavoro di una forza rispetto ad uno spostamento
Forze conservative ed energia potenziale
Circuitazione del campo elettrostatico

Prof. Danilo Saccoccioni

NB. I contenuti di questa dispensa devono essere conosciuti molto bene in tutti i dettagli per proseguire lo studio e capire le applicazioni.

Si consideri un corpo puntiforme C soggetto ad N forze $\vec{F_1}, \vec{F_2} \dots \vec{F_N}$. La risultante $\vec{F}_{TOT} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_N}$ determina ovviamente la traiettoria nel tempo da un punto iniziale *A* ad un punto finale *B*.
Si consideri una di queste N forze, che indicheremo con $\vec{F}$. Vogliamo definire il **lavoro** compiuto da $\vec{F}$ rispetto allo spostamento *AB* e a tale scopo occorre distinguere due casi:

Lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ rispetto ad uno spostamento *AB*

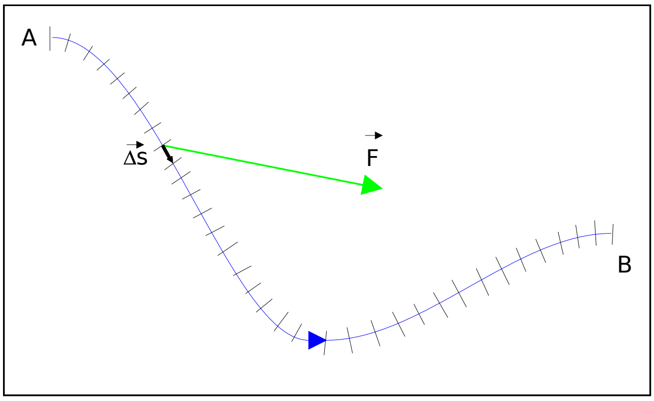
1. **Caso 1**: *Forza costante nel tempo e spostamento AB rettilineo*

   $L_{AB}^{F} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos(\alpha)$ Cioè il lavoro è definito come prodotto scalare di forza e spostamento (L'angolo α è quello fra i due vettori)

2. **Caso 2**: *Forza generalmente variabile nel tempo o spostamento AB non rettilineo*

   In tal caso è necessario suddividere il percorso da *A* a *B* in tanti trattini $\overrightarrow{\Delta s}$ sufficientemente piccoli in modo che in ciascun tratto valgano le ipotesi del caso 1. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ rispetto al percorso *AB* è allora così definito:

   $$L_{AB}^{F} = Somma\left(\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta s}\right)$$



In questa dispensa dimostreremo che le forze elettrostatiche hanno proprietà molto importanti legate al lavoro da esse compiuto; l'importanza risiede sia nello sviluppo teorico dell'elettromagnetismo sia nelle applicazioni.

Definizione di forza conservativa

Una forza $\vec{F}$ si dice **conservativa** se il lavoro da essa compiuto rispetto a *qualsiasi percorso chiuso* è zero: $L_{perc.chiuso}^{F} = 0$

Esempi di forze non conservative: le forze motrici, gli attriti (perché?).
Esempi di forze conservative: forza gravitazionale, forza elastica, forza di Coulomb (lo dimostreremo in queste pagine).

Per le forze conservative vale il seguente fondamentale **teorema**:

Se una forza $\vec{F}$ è conservativa, allora

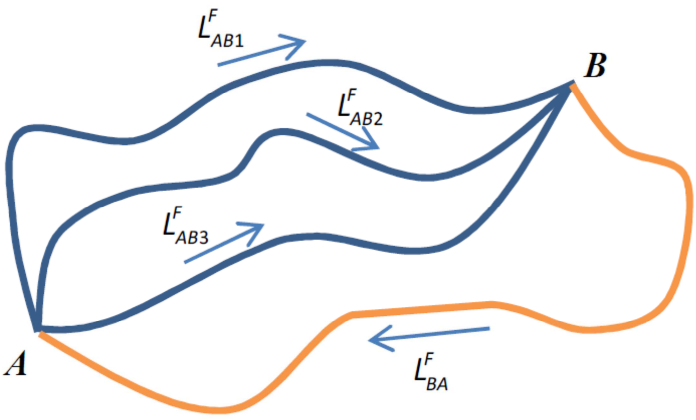
1. il lavoro da essa compiuto rispetto ad uno spostamento da *A* a *B* *non dipende dal particolare percorso scelto*, ma solo dalla posizione degli estremi;
2. è possibile definire una funzione *U*, chiamata energia potenziale del corpo puntiforme, che *dipende solo dal punto scelto* nello spazio e che permette di esprimere il lavoro come: $L_{AB}^{F} = U_A - U_B$.

DIMOSTRAZIONE

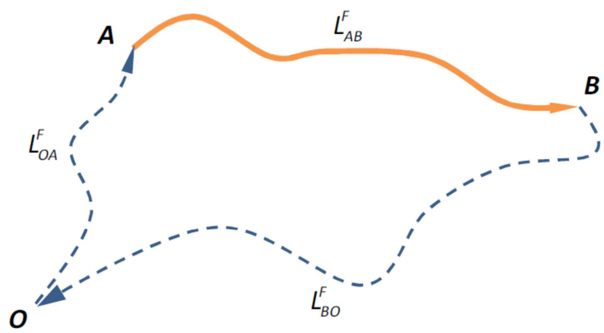
1. Consideriamo la figura a lato. Poiché per ipotesi $\vec{F}$ è conservativa, abbiamo che $L^F_{perc.chiuso} = 0$ per qualsiasi percorso chiuso, dunque:

$$L^F_{AB1} + L^F_{BA} = 0$$
$$L^F_{AB2} + L^F_{BA} = 0$$
$$L^F_{AB3} + L^F_{BA} = 0$$

Ma allora: $L^F_{AB1} = L^F_{AB2} = L^F_{AB3} = \ldots$
Dunque vale la tesi, cioè il lavoro non dipende dal particolare percorso scelto, ma solo dagli estremi.



2. Consideriamo il lavoro L^F_{AB}. Fissiamo un punto *O*, arbitrariamente scelto, che chiameremo *riferimento per l'energia potenziale*. Se immaginiamo che il percorso *AB* sia solo un tratto del percorso chiuso che passa per *O* (indicato in figura), abbiamo:



$$L^F_{perc.chiuso} = 0$$

cioè: $L^F_{OA} + L^F_{AB} + L^F_{BO} = 0$,

ovvero: $L^F_{AB} = -L^F_{OA} - L^F_{BO} = L^F_{AO} - L^F_{BO}$

Se ora chiamiamo *energia potenziale del corpo puntiforme* <u>la funzione che nel generico punto *P* dello spazio assume come valore</u> L^F_{PO}, cioè il lavoro compiuto dalla forza rispetto allo spostamento da *P* ad *O*, abbiamo:

$$L^F_{AB} = L^F_{AO} - L^F_{BO} = U_A - U_B$$

Quest'ultima relazione dimostra la seconda parte del teorema.

OSSERVAZIONI IMPORTANTI

- Nella dimostrazione del precedente teorema abbiamo visto che per una forza conservativa $\vec{F}$ è possibile definire una funzione *U*, chiamata energia potenziale del corpo, che nel punto *P* vale:

  $$U_p = L^F_{PO} = -L^F_{OP}$$

- Ovviamente il punto *O* (ovvero il riferimento per l'energia potenziale) non può cambiare una volta che è stato fissato.
- Spesso per comodità il punto *O* viene posto all'infinito, così l'energia potenziale in un punto *P* è il lavoro compiuto da $\vec{F}$ nello spostamento da *P* all'infinito.
- Il nome "energia potenziale nel punto *P*" indica il lavoro che *potenzialmente* la forza $\vec{F}$ è in grado di compiere per il solo fatto che il corpo si trovi nel punto *P*. Si pensi ad esempio ad un sasso prima di essere lasciato cadere: per il solo fatto che si trovi ad una certa altezza esso è potenzialmente in grado di compiere un lavoro (se appunto fosse lasciato cadere).

Finalmente abbiamo tutti gli strumenti matematici per analizzare le forze e i campi elettrostatici (generati, cioè, da **cariche sorgenti ferme**). Ci mettiamo nelle ipotesi più generali, pertanto consideriamo una carica *q* posta in un campo elettrico generato da N cariche $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_N$. Il campo totale generato dalle N cariche è, come sappiamo, la somma vettoriale dei campi generati dalle singole cariche: $\vec{E}_{TOT} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \ldots + \vec{E_N}$.
La forza totale che agisce su *q* è pertanto: $\vec{F}_{TOT} = q\vec{E}_{TOT} = q\vec{E_1} + q\vec{E_2} + \ldots + q\vec{E_N} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_N}$
Le singole forze $\vec{F_1}, \vec{F_2} \ldots \vec{F_N}$ hanno ovviamente modulo dato dalla legge di Coulomb applicata a *q* e alla corrispondente singola carica sorgente. Chiamiamo $\vec{F}$ una qualsiasi di queste N forze e passiamo a dimostrare il seguente fondamentale teorema:

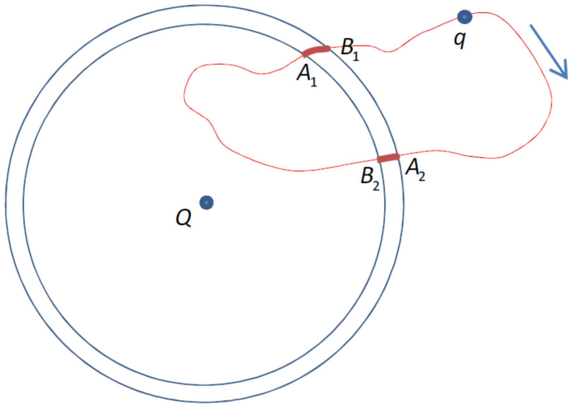
Conservatività della forza di Coulomb

La forza di Coulomb $\vec{F}$ che una carica *Q* esercita su una carica *q* è conservativa.

DIMOSTRAZIONE

Il teorema vale sia nel vuoto che negli altri mezzi materiali (qui ci limitiamo a svolgere i calcoli nel vuoto).
E' sufficiente dimostrare che il lavoro compiuto dalla forza in un percorso chiuso qualsiasi è zero, cioè $L^F_{perc.chiuso} = 0$.

Facciamo riferimento alla figura. Il percorso chiuso effettuato dalla carica *q* può essere scomposto in tanti trattini, secondo i criteri noti; a tale scopo, conviene considerare i trattini che risultano dalla suddivisione del percorso da parte di tante sfere concentriche con centro nella carica sorgente *Q*. E' facile rendersi conto che i contributi al lavoro relativi ai tratti A_1B_1 e A_2B_2 sono opposti, quindi si annullano:



$$L^F_{A_1B_1} + L^F_{A_2B_2} = k_0 \frac{|Q||q|}{r^2} \cdot \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \cos(\alpha_1) + k_0 \frac{|Q||q|}{r^2} \cdot \left|\overrightarrow{A_2B_2}\right| \cos(\alpha_2) =$$

$$= k_0 \frac{|Q||q|}{r^2} \cdot \left[\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \cos(\alpha_1) + \left|\overrightarrow{A_2B_2}\right| \cos(\alpha_2) \right] = 0$$

Infatti gli addendi in parentesi quadre sono opposti (α_1 e α_2 sono gli angoli formati dai vettori $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$ con la forza subita da *q*, che esce radialmente da *Q*).
Quanto trovato per i trattini A_1B_1 e A_2B_2 vale per tutte le altre coppie di trattini individuati da altre sfere concentriche, quindi il lavoro complessivo sul percorso chiuso è 0.

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE

Se, come abbiamo appena dimostrato, è conservativa la forza esercitata su q da una ***singola*** *carica sorgente Q , è allora conservativa la forza esercitata su q* ***da un numero qualsiasi di cariche*** $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_N$.

La dimostrazione appena svolta permette di asserire che per una forza elettrostatica $\vec{F}$ esercitata da una qualsiasi distribuzione di cariche $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_N$ su una carica *q*, si ha $L^F_{perc.chiuso} = 0$, cioè $Somma_{su\ perc.\ chiuso}\left(\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta s}\right) = 0$.
Sostituendo al posto di $\vec{F}$ la quantità $q \cdot \vec{E}$ (dove $\vec{E}$ è generato da $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_N$), si ottiene:

$\boxed{Somma_{su\ perc.\ chiuso}\left(\vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta s}\right) = 0}$ (sul libro è riportata a pag. 54 con i simboli $\sum_i \vec{E_i} \cdot \overrightarrow{\Delta s_i} = 0$)

La formula precedente si enuncia dicendo:

La circuitazione del campo elettrostatico $\vec{E}$ (cioè generato da cariche ferme) lungo una linea chiusa è nulla.

La precedente affermazione costituisce un risultato fondamentale dell'elettrostatica, importante sia nello sviluppo della teoria che nelle applicazioni.

Attraverso gli integrali si può dimostrare, infine, la seguente proposizione:

Poiché le forze elettrostatiche sono conservative, per esse si può definire una funzione energia potenziale *U*. Prendendo come riferimento per l'energia potenziale un punto all'infinito, la formula per calcolare l'energia potenziale posseduta da una carica *q* in un punto *P* dello spazio a causa di un campo generato da N cariche $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_N$ è

$$U_P = k_0 \frac{Q_1 q}{r_1} + k_0 \frac{Q_2 q}{r_2} + \ \ldots \ + k_0 \frac{Q_N q}{r_N}$$ (Non vanno i moduli!!!)

dove $r_1, r_2 \ldots r_N$ sono le distanze di $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_N$ da *q*.