Danilo Saccoccioni

STORIA DELL'INFINITO IN MATEMATICA E IN FILOSOFIA

PERCORSO STORICO

FASI STORICHE

La nozione di "infinito" è andata maturando nel corso della storia attraverso lo sviluppo parallelo della Filosofia, della Matematica e della Teologia. Le tappe fondamentali di questa maturazione possono seguire questa classificazione:

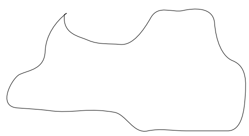
- *Età preellenica*
- *Età ellenica ed ellenistica*
- *Età medievale*
- *Età moderna*

ETA' PREELLENICA

L'esperienza religiosa ha da sempre portato l'uomo ad associare il concetto di "infinito" a Dio. Oltre all'arte figurata, si ha traccia di ciò in ogni manifestazione culturale. Ad esempio in Egitto, dopo la scoperta della famosa Pietra di Rosetta, fu possibile decifrare, tra le altre cose, anche la numerazione geroglifica.
Attraverso uno schema iterativo a base 10, il milione veniva rappresentato attraverso una figura inginocchiata, forse rappresentante il Dio dell'infinito

ETA' PREELLENICA

Come vedremo successivamente, un problema legato all'infinito è quello relativo alla misura di grandezze associate a figure geometriche curvilinee:



Infatti, come definire una lunghezza o un'area relativamente a figure curvilinee?

ETA' PREELLENICA

La figura curvilinea più intuitiva è il cerchio. Dunque, come definire ed eventualmente calcolare la lunghezza di una circonferenza e l'area di un cerchio? Tale problema nasceva spesso, ad esempio, da esigenze pratiche relative ai confini territoriali.

In mancanza di una definizione adeguata, si procedeva per approssimazione, dove erano implicite:

un'analogia con i casi semplici di quadrati e rettangoli;

l'assunzione del fatto per cui a figure incluse in altre doveva corrispondere un'area minore

ETA' PREELLENICA

Una prima affermazione **esatta**, non approssimata, relativamente a figure curvilinee, si trova nella regola egiziana per trovare la circonferenza del cerchio:

Il rapporto tra l'area di un cerchio e la lunghezza della circonferenza è uguale al rapporto tra l'area del quadrato circoscritto e il suo perimetro.

Anche se siamo lontani dal metodo dimostrativo greco, tuttavia la regola precedente avvicina alla mentalità ellenica.

ETA' PREELLENICA

I babilonesi si trovarono in almeno un paio di questioni di fronte al problema dell'infinito, ma non lo investigarono in maniera sistematica.

Uno dei procedimenti algoritmici che svilupparono è quello relativo all'estrazione di radice quadrata con un metodo iterativo talvolta citato come metodo di Newton (ma noto anche in Grecia, attribuito ad Archita (428-365 a.C.) o a Erone di Alessandria (II-I secolo d.C.)).

ETA' PREELLENICA

I babilonesi rifiutarono di occuparsi di processi infiniti anche allorché si imbatterono di fronte ai reciproci dei numeri 7 e 11, per i quali non esiste rappresentazione sessagesimale limitata (tale, infatti era il sistema di numerazione usato).

I PITAGORICI

Pitagora di Samo (580-500 a.C.) forse viaggiò in Oriente venendo a contatto con la Matematica egiziana e babilonese. Profeta e mistico, fondò una setta i cui adepti erano legati da un forte vincolo di segretezza. La concezione fondamentale alla base del pensiero pitagorico è l'assunzione filosofica che ogni cosa va ridotta ad "arithmos", ovvero a proprietà intrinseche dei numeri interi e dei loro rapporti.
I numeri erano anche la base del loro misticismo; ad esempio il numero 10 (*tetractys*) era:

"grande, onnipotente e creatore di tutte le cose, il principio e la guida sia della vita divina che di quella terrestre".

I PITAGORICI

Oltre al particolare significato del numero 10, la scuola pitagorica si imbatté in più occasioni nei processi infiniti; per la particolare concezione filosofica professata, ovvero che i numeri interi fossero la base di tutta la realtà, i pitagorici però contribuirono a creare in molti pensatori greci e anche in quelli successivi, fino ai moderni, quello che è stato definito *horror infiniti*.

I PITAGORICI

In particolare il colpo più duro per la scuola fu dato dalla scoperta di grandezze incommensurabili, che comparivano anche in casi semplicissimi (diagonale e lato di un quadrato; diagonale e lato di un pentagono regolare, simbolo della stessa scuola pitagorica). Coppie di grandezze incommensurabili rendevano problematico il confronto tra le stesse grandezze:

- davano luogo a processi infiniti (si veda anche l'algoritmo di Euclide, più tardo, applicato a segmenti)
- impedivano la possibilità di esprimere il suddetto confronto attraverso rapporti tra numeri interi.

I PITAGORICI

Problematica è l'attribuzione storica della scoperta dell'incommensurabilità. Alcuni l'hanno attribuita ad Ippaso di Metaponto, scacciato dalla setta perché avrebbe divulgato il segreto della scoperta. Non si conoscono neppure le circostanze della scoperta; sono state fatte varie ipotesi:

- Autoriproduzione della sezione aurea, che ad esempio compariva nel confronto tra diagonale e lato del pentagono regolare;
- Applicazione del Teorema di Pitagora a particolari triangoli rettangoli, dimostrando l'incommensurabilità tra ipotenusa e cateto facendo riferimento alla distinzione tra numeri pari e dispari.

ELEATI E PITAGORICI

ELEATI:
- unità e permanenza dell'essere

PITAGORICI:
- mutamento, molteplicità e divisibilità, continuità di punti intesi come unità

PARADOSSI DI ZENONE

- **della dicotomia e di Achille**: mostrano che se si assume l'infinita suddivisibilità dello spazio e del tempo, il movimento risulta impossibile
- **della freccia e dello stadio**: mostrano che se si assume che la suddivisibilità dello spazio e del tempo termini in elementi indivisibili, il movimento risulta impossibile

DEMOCRITO di Abdera (460-370)

I problemi matematici cui era interessato erano soprattutto quelli che richiedevano una sorta di metodo infinitesimale:

atomismo geometrico – infinità di infinitesimi

Come l'incommensurabilità e il movimento, l'atomismo geometrico dava luogo a paradossi: ad es., se sezioni infinitesime adiacenti di una figura solida sono uguali, allora tutte le sezioni parallele sono uguali. Archimede considerava questi metodi non dimostrativi.

Incommensurabilità, movimento, atomismo geometrico davano luogo a paradossi: tutti erano legati a procedimenti infiniti:

HORROR INFINITI

D'altra parte le ricerche geometriche nelle scuole stimolavano sempre di più l'interesse verso problemi che divennero "canonici", fino all'epoca moderna (quadratura cerchio, duplicazione cubo ecc...)

La necessità di confrontare rapporti tra grandezze incommensurabili richiese una opportuna teoria delle proporzioni (Eudosso, Euclide)

La necessità di confrontare grandezze curvilinee e rettilinee richiese opportune assunzioni di proprietà (assioma di Archimede, proprietà di esaustione) equivalenti a teoremi moderni, ma la cui applicazione, in assenza di un calcolo, richiedeva una lunga procedura di doppia riduzione all'assurdo.

Le proprietà suddette furono attribuite da Archimede a Eudosso e fanno la loro prima comparsa negli *Elementi* di Euclide

Grazie alle precedenti assunzioni, divenne possibile dare rigorose dimostrazioni sulla quadratura di figure con contorni curvilinei.

Fu un momento storico importante, anche perché cominciarono quelle sottili dispute su infinitesimi e infiniti che durarono fino all'epoca contemporanea

Esempio: "Sulle linee indivisibili" di Aristotele, dove si esponeva la tesi dell'impossibilità dell'infinitesimo attuale (indivisibile)

Esempio: quadratura del cerchio di Antifonte – obiezioni di Aristotele

ARISTOTELE

Aristotele fu una figura molto osteggiata in epoca moderna, soprattutto per le sue considerazioni sull'infinito potenziale e l'infinito attuale.

I matematici, secondo Aristotele, "non hanno bisogno dell'infinito né lo usano"

In realtà, anche se Aristotele commise l'errore di negare la necessità di insiemi attualmente infiniti in Matematica, tuttavia la sua impostazione metafisica fornì ai medievali idee sui fondamenti della Matematica oggi ancora poco conosciute, esplorate ed applicate.

Vedremo ora tutta una serie di studi e intuizioni che nel corso dei secoli portarono allo sviluppo delle idee finora esposte sulla nozione di "infinito"

Il metodo di esaustione di Eudosso permetteva di verificare l'attribuzione di un'area (o, nel caso spaziale, di un volume) a figure delimitate da contorni curvilinei con un ragionamento rigoroso, attraverso una duplice *reductio ad absurdum*.

Nell'opera di Euclide troviamo ad esempio la dimostrazione della proprietà per cui le aree dei cerchi stanno tra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi diametri. Sebbene alcuni storici antichi attribuiscano ad Ippocrate di Chio (V sec. a.C.) una prima dimostrazione di tale proprietà, tuttavia pare che spetti ad Eudosso (cui probabilmente Euclide si riferiva) il fatto di averla data in forma rigorosa.

La teoria delle proporzioni permetteva di estendere l'applicazione del Teorema di Pitagora non solo a quadrati costruiti sui lati, ma a terne di figure simili qualunque, anche con contorni curvilinei.
Tuttavia la sua importanza generale può venire adeguatamente illustrata attraverso una citazione del testo:

Lucio Russo
La rivoluzione dimenticata
Feltrinelli, Milano 2006, pagg. 69-70

«La definizione euclidea di proporzione fu a lungo criticata dai matematici moderni, che non riuscivano a comprendere la necessità di una definizione così complessa [...]. L'idea di Euclide fu finalmente recuperata da Weierstrass e Dedekind, che fondarono la moderna teoria dei numeri reali essenzialmente traducendo la definizione 5 nel linguaggio attualmente usato. La traduzione nei termini usati da Dedekind è in sostanza la seguente. Se chiamiamo *numero reale* ogni possibile "rapporto euclideo", la definizione euclidea si traduce nel fatto che un numero reale è univocamente determinato dal suo comportamento rispetto a ogni coppia (h,k) di interi. [...] I primi lavori sulla "moderna" teoria dei numeri reali risalgono al 1872.»

Vedremo successivamente gli sviluppi dell'epoca moderna...

Accanto all'*horror infiniti* che si veniva ad assumere in alcuni pensatori, Euclide non disdegnava di considerare l'infinità matematica di alcuni insiemi: classico è l'esempio dell'infinità dei numeri primi:

"Vi sono più numeri primi che in ogni quantità [finita] assegnata di numeri primi"
(Euclide, *Elementi*, IX libro, prop. 20;
cit. da L. Russo, pag. 66)

Afferma L. Russo nello stesso testo (pag. 67):

«Euclide, conoscendo molto bene la delicatezza del concetto di infinito, che era chiara almeno dal tempo di Zenone, riesce ad ottenere una dimostrazione rigorosa senza trattare mai direttamente gli infiniti, ma riducendo il problema allo studio di quantità finite. *E' proprio questo il metodo dell'Analisi Matematica contemporanea*. Il fatto che Euclide non usi la parola "infinito" è evidentemente del tutto irrilevante. Il termine "infinito" non è comunque una novità introdotta dai matematici moderni, ma la traduzione del termine greco ἄπειρον, che, dopo una lunga e complessa storia, fu infine usato in Matematica nel significato di "infinito attuale"»

Russo continua affermando, nella stessa pagina, che nello stesso senso il termine greco veniva utilizzato sia da Apollonio di Perga (III sec. a.C.) sia da Platone nel suo *Teeteto.*

Anche in epoca moderna la regolarità geometrica venne introdotta in modelli cosmologici e addirittura teologici: Keplero rimase così colpito dall'impossibilità di costruire più di cinque poliedri regolari (impossibilità dimostrata negli *Elementi* di Euclide) che «costruì tutta una cosmologia basata sui cinque solidi regolari, ritenendo che essi dovevano aver fornito al Creatore la chiave per la struttura dell'universo» (Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano 1990,pag. 140).

Archimede utilizzò processi infiniti in tutti i suoi campi di studio:

- Calcolo di aree e volumi
- Ricerca dei centri di gravità e delle posizioni di equilibrio di galleggianti a paraboloide
- Applicazioni delle tangenti alle curve
- Successioni numeriche (per es. calcolava le radici quadrate con un metodo iterativo simile a quello dei babilonesi)

In tutti i casi, veniva utilizzato il metodo di esaustione attraverso la doppia *reductio ad absurdum*.

Boyer riporta una citazione di Archimede a proposito dell'assioma che eliminava l'*indivisibile* (*l'eccesso per cui la maggiore di due aree disuguali supera la minore può, se sommato a se stesso, diventare superiore a qualsiasi area finita data*):

«I precedenti geometri hanno usato questo lemma, giacché è usando questo stesso lemma che essi hanno mostrato che i cerchi stanno l'uno rispetto all'altro in un rapporto che è uguale a quello fra i quadrati dei loro diametri, e che le sfere stanno l'una rispetto all'altra in un rapporto che è uguale a quello fra i cubi dei loro diametri, e inoltre che ogni piramide è uguale alla terza parte di un prisma che ha la stessa base della piramide e uguale altezza; [...] essi lo hanno dimostrato assumendo un certo lemma simile al lemma predetto.»

Verso il III sec. d.C. (Tarda Età Alessandrina) troviamo quello che viene considerato il più grande algebrista greco:

Diofanto di Alessandria
Diofanto si occupò di equazioni indeterminate con infinite soluzioni, tuttavia egli calcolava una sola delle soluzioni: ciò assomigliava ai metodi degli algebristi babilonesi, tuttavia se ne discostava per l'esattezza delle soluzioni trovate e per l'astrazione rispetto all'applicazione immediata a casi concreti (misure di grano, dimensioni di terreni ecc...)

All'inizio del IV sec. d.C. Pappo di Alessandria compone la *Collezione*, l'ultimo trattato matematico veramente significativo dell'antichità. Le opere successive, per oltre un millennio, non furono che commentari alle opere antiche e aggiunsero ben poco a quanto già si conosceva.

Nella *Collezione* compare per la prima volta quello che solitamente viene designato con il nome di Guldino (XVII sec.):

Se una curva piana chiusa viene fatta ruotare intorno a una retta che non attraversa la curva, il volume del solido così generato viene calcolato facendo il prodotto dell'area delimitata dalla curva per la distanza percorsa durante la rotazione dal centro di gravità dell'area.

(Boyer, pag. 222)

Il teorema di Pappo-Guldino è il più generale che si conosca nell'antichità relativamente al campo dell'analisi infinitesimale. Pappo formulò anche il teorema relativo alla superficie del solido generato.

Nella CINA antica, fino ai primi secoli dell'Era Cristiana, erano noti algoritmi per il calcolo approssimato di radici. Il valore di p veniva calcolato con estrema accuratezza, attraverso una successione numerica costruita con una doppia applicazione del teorema di Pitagora a poligoni inscritti ad una circonferenza ottenuti raddoppiando progressivamente il numero dei lati. Si otteneva:

$$3{,}1415926 < p < 3{,}1415927$$

In Cina si conoscono anche esempi di soluzione di problemi indeterminati (quattro equazioni in cinque incognite)

Alla fine del V sec. d.C. anche in India si conoscevano accurate approssimazioni di p, ma è possibile un'influenza di esempi greci precedenti.

Erano note anche le proprietà elementari delle progressioni aritmetiche.

Gli indiani consideravano numeri anche gli irrazionali, a differenza dei greci: ciò era di grande aiuto in algebra, ma forse il loro risultato era più ingenuità logica che intuizione: infatti mancava una chiara distinzione tra risultati esatti e risultati approssimati; da qui la non seria considerazione delle differenze tra grandezze commensurabili e incommensurabili.

Brahmagupta (VII sec.) si occupò di problemi indeterminati: fu il primo a dare una soluzione generale dell'equazione diofantea lineare (infinite soluzioni). Lo stesso Diofanto non diede tutte le soluzioni.

In Grecia antica, sebbene il concetto di “nulla” fosse di forte interesse filosofico, tuttavia l'aritmetica dello zero non faceva parte della Matematica.

Aristotele aveva già fatto notare che non esiste nessun rapporto per cui un numero come quattro superi zero.

Brahamgupta stesso non era chiaro; affermava che $0:0 = 0$, mentre non si pronunciava sulla delicata questione di $a:0$, con $a \neq 0$.

Bhaskara (XII sec.) colmò alcune lacune; nel suo *Vija-Ganita* troviamo:

Enunciato: Dividendo 3, Divisore 0. Quoziente la frazione 3/0. Questa frazione, il cui denominatore è zero, viene definita una quantità infinita. In questa quantità, consistente in ciò che ha come divisore lo zero, non v'è nessuna alterazione, anche se vi viene aggiunto o tolto molto: infatti nessun mutamento ha luogo nella infinità e immutabilità di Dio.

(cit. Boyer, pag. 259)

Purtroppo l'affermazione successiva per cui $(a/0)\cdot 0 = a$ mostra la mancanza di una chiara comprensione del problema.

Presso gli Arabi, Omar Khayyam (XI-XII sec.) giunse, come ci segnala Boyer (pag. 283), molto vicino alla definizione di irrazionale e si sforzò di afferrare il concetto di numero reale in generale. Tutto ciò nella convinzione di Khayyam che «l'algebra non è altro che la dimostrazione di fatti geometrici».

Gli arabi continuarono inoltre ad applicare il metodo di esaustione alle figure.

Il Medioevo cristiano conobbe un grosso sforzo filosofico di sistematizzare il concetto di “infinito”, soprattutto in relazione a Dio e alle relazioni trinitarie. Il culmine di questo sforzo, ancora per la maggior parte inesplorato per le immense implicazioni che ha nei fondamenti della Matematica, è rappresentato da Tommaso d'Aquino (XIII sec.).

Tommaso riprende la distinzione aristotelica di infinito in potenza e in atto, ma la amplia correggendola. Attraverso argomentazioni ontologiche Tommaso dimostra valida la seguente classificazione:

- Oggetti *infiniti in potenza*
- Oggetti *attualmente infiniti* in senso *relativo* (*actu infiniti secundum quid*)
- Oggetti *attualmente infiniti* in senso *assoluto* (*actu infiniti simpliciter*)

I tre precedenti sono tutti perfettamente consistenti, al contrario di quest'altro:

- Oggetti *infiniti in atto* (*infiniti in actu*)

Nella classificazione tommasiana gli insiemi infiniti dovrebbero rientrare nella seconda categoria (infiniti *secundum quid*).

C'è da dire che, sebbene Tommaso sistematizzò correttamente la nozione di infinito, tuttavia la sua scrupolosa fedeltà al pensiero aristotelico gli impedì di applicare di fatto l'infinito *secundum quid* a molti aspetti della Matematica.

E' campo di ricerca attuale, aperto da circa un ventennio, il recupero del pensiero tommasiano nel problema epistemologico dei fondamenti della Matematica.

Continuiamo la presentazione di alcuni risultati che progressivamente contribuirono ad approfondire l'infinito matematico...

Il 1202 fu l'anno del *Liber abaci* di Fibonacci. Importante per la diffusione del sistema di numerazione indo-arabico in occidente (e del simbolo “0”), il testo proponeva il “problema dei conigli”, legato così felicemente alla sezione aurea attraverso la cosiddetta “successione di Fibonacci”.

Il testo, inoltre, si occupava di problemi indeterminati, che ricordavano Diofanto.

Giordano Nemorario e Giovanni Campano discussero nel XIII sec. Il problema dell'angolo di contatto, argomento che fu oggetto di vivaci discussioni nel tardo periodo medievale. L'angolo di contatto (formato da un arco di circonf. e dalla tangente a uno dei suoi estremi) originava una apparente contraddizione con la proposizione fondamentale del metodo di esaustione: dall'angolo rettilineo, essendo maggiore dell'angolo circolare, poteva essere sottratta più della metà... ma seguendo la nota successione di passi l'angolo rettilineo paradossalmente non diventa mai inferiore all'angolo di contatto. Campano concludeva che la proposizione si poteva applicare solo a grandezze dello stesso genere.

Nel XIV sec. Tommaso Bradwardine, nel suo *Tractatus de continuo*

«*sosteneva che le grandezze continue, sebbene comprendano un numero infinito di indivisibili, non sono fatte di atomi matematici, ma sono invece composte da un numero infinito di elementi continui dello stesso genere.*»

(Boyer, pag. 307)

Qualche decennio più tardi, Nicola Oresme cercava di afferrare quello che oggi scriveremmo

$$x^{\sqrt{2}}$$

Ma Oresme è importante anche per altre intuizioni anticipatrici...

Una grande novità che introdusse fu quella di rappresentare graficamente quantità variabili e cercare l'area della zona sottesa dalla curva, associata allo spazio percorso dal mobile.

Oresme, come altri dell'epoca, si occupò anche della somma di serie infinite, utilizzando, per il calcolo, la sua rappresentazione grafica. Tentativi precedenti che anticipavano questo delle serie infinite sono solo quelli relativi ad alcuni algoritmi iterativi e al procedimento archimedeo per il calcolo della somma di una progressione geometrica infinita.

Oresme fornisce anche la prima dimostrazione della divergenza della seria armonica, ottenuta raggruppando opportunamente i termini.

Nel XV sec. Regiomontano attribuì il valore *infinito* alla tangente di 90°.

Nel 1509 Luca Pacioli pubblicò il *De divina proportione* su quella che più tardi venne chiamata “sezione aurea”.

Nel XVI sec. Michael Stifel, uno degli algebristi tedeschi che resero popolare i simboli “+” e “-”, sebbene avesse familiarità con i numeri negativi (che comunque definiva “absurdi”), dimostrava esitazione nei confronti degli irrazionali, dicendo che erano «nascosti da una sorta di caligine dell'infinitezza».

Al tempo di Gerolamo Cardano (1501-1576) i numeri irrazionali erano generalmente ammessi, anche se non avevano solido fondamento, giacché potevano facilmente venire approssimati da numeri razionali. Addirittura sollevavano maggiori difficoltà i negativi, anche se la direzione di una retta poteva renderli almeno plausibili.

Il secoli XV e XVI conobbero anche lo sviluppo sistematico della prospettiva con linee di fuga e punti all'infinito.

Nel XVI sec. François Viète, grande algebrista francese, rifiutò di trattare sistematicamente problemi indeterminati legati a problemi geometrici. Tuttavia fu anche uno dei primi analisti nel senso moderno di uno che studia processi infiniti: fu il primo a dare un'espressione numerica teoricamente precisa per p, un prodotto infinito così esprimibile:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

Significativo era il fatto che le notazioni aritmetiche, algebriche e trigonometriche stavano sempre di più invadendo il campo dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo, campo che un tempo era stato dominato dalla Geometria.

Ma fu il XVII sec. il periodo in cui l'infinito cercava di entrare prepotentemente in Matematica.

Galileo, nelle sue opere di argomento astronomico e fisico, si avvicinò spesso a concezioni che avrebbero portato alla nascita del calcolo infinitesimale.

Citiamo Boyer (pag. 372):

«*Stevino, Keplero e Galileo avevano tutti bisogno di ricorrere ai metodi archimedei, ma, a causa della loro mentalità pratica, preferivano evitare le sottigliezze logiche del metodo di esaustione. Furono in gran parte le modificazioni introdotte per esigenze pratiche nei metodi infinitesimali degli antichi che alla fine portarono alla creazione del calcolo infinitesimale*».

Stevino era interessato ad applicazioni fisiche delle tecniche infinitesimali (es. del centro di gravità dei triangoli), Keplero ad applicazioni astronomiche (esempi del principio di continuità delle coniche e dell'area dell'ellisse). Keplero concepiva l'area di settori dell'ellisse come insieme di triangoli infinitamente piccoli. I solidi venivano considerati come insiemi composti di infiniti elementi infinitesimali, eliminando la doppia *reductio ad abs*.

Galileo, in aperta polemica con gli aristotelici della sua epoca, nelle due opere:
- *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*
- *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*,

faceva considerazioni sull'infinitamente grande e sull'infinitamente piccolo. Quest'ultimo aveva grande importanza per le considerazioni sulla dinamica; è certo che

Galileo conoscesse l'opera di Oresme, ma le diede maggiore ordine e sistemazione.

Esempi delle considerazioni di Galileo:

- infinitesimi di ordine superiori e caduta dei gravi;
- ripiegatura di un segmento a formare un cerchio (secondo Salviati corrispondeva alla riduzione all'atto di infinite parti che prima erano contenute in potenza);
- corrispondenza biunivoca tra interi positivi e quadrati perfetti;

Galileo venne così a trovarsi di fronte alla proprietà fondamentale degli insiemi infiniti, riconoscendo almeno che i quadrati perfetti non erano di meno rispetto a tutti gli interi. Sbagliò tuttavia ad affermare che «*non solamente non si possa dire un infinito esser maggiore d'un altro infinito, ma né anco che e' sia maggior d'un finito*».

Un discepolo di Galileo, Bonaventura Cavalieri, stimolato dalle riflessioni di Keplero e Galileo, organizzò le idee sugli infinitesimi. Le idee della *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) erano essenzialmente basate sulle concezioni di Oresme, Keplero e Galileo: superfici e solidi considerati come composti da *indivisibili*. In realtà Cavalieri aveva come precedente Archimede (nel suo *Metodo*, all'epoca non ancora scoperto), il quale, però, non attribuiva rigore logico dimostrativo a ciò che poteva servire soltanto come tecnica per conoscere in anticipo ciò che andava effettivamente dimostrato.

Con il suo metodo, Cavalieri trovò un teorema equivalente alla formula moderna:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Confrontò anche indivisibili rettilinei con indivisibili curvilinei nel trasformare la spirale di Archimede $r = a\cdot\theta$ nella parabola di Apollonio $x^2 = ay$.

La *Geometria indivisibilibus* facilitava enormemente il problema delle quadrature, ma presto i matematici raggiunsero risultati in nuove direzioni...

Torricelli, comunque, riuscì nella prima rettificazione moderna di una curva: la spirale logaritmica. La possibilità della rettificazione di curve era stato un problema dibattuto, da Aristotele ad Averroè a Cartesio.

Intanto Fermat e Cartesio individuarono intorno agli anni '30 del XVII sec. il principio fondamentale della Geometria analitica: il fatto che a equazioni indeterminate in due incognite corrispondano luoghi geometrici.

Ma l'importanza di Fermat va sottolineata anche per essere l'inventore del calcolo differenziale. Costruiva il rapporto incrementale e poi uguagliava a zero l'incremento, facendo un'operazione che ricorda quella di limite. Sebbene Fermat fosse ben lontano da definizioni rigorose, ciò che avrebbe richiesto ancora molto tempo ai matematici, tuttavia il suo metodo per calcolare massimi, minimi e tangenti è analogo a quello seguito oggi.
Cartesio inizialmente non ammise la validità del metodo di Fermat, comunicatogli da Mersenne.

Fermat applicò il suo metodo alle curve $y = x^n$ per determinarne tangenti e area sottesa (per quest'ultimo calcolo fece uso anche di somme di serie infinite).

Fermat inventò anche il metodo che lui definì come metodo della "discesa infinita", una sorta di induzione matematica in senso contrario. In realtà la stessa induzione matematica, o ragionamento ricorsivo, era nota a Fermat, oltre che a Pascal. Viene spesso definita "induzione completa" per distinguerla dall'induzione scientifica o baconiana (induzione incompleta). Per completezza segnaliamo che San Tommaso d'Aquino individuò quella che oggi viene definita "induzione costitutiva" dell'universale; anche questo è un concetto importantissimo e fecondo, ma poco esplorato.

Si era insomma avviata presso i matematici del '600 una lunga serie di sforzi volti alla ricerca della quadratura delle figure e delle tangenti alle curve.
Gregorio di San Vincenzo, Roberval e Pascal sono altri matematici che si muovevano in questa direzione.
Torricelli, in particolare, trovò che una figura di dimensioni infinite può avere grandezza finita; non fu il primo nella scoperta: probabilmente anticipato da Fermat o da Roberval, certamente da Oresme (XIV sec.). Inoltre Torricelli si rese conto, trattando rappresentazioni cinematiche, del carattere inverso dei problemi di quadratura e della tangente.

Torricelli e Pascal furono due immediati anticipatori del calcolo infinitesimale. Leibniz fu costretto ad ammettere che proprio leggendo un'opera di Pascal aveva avuto un'improvvisa intuizione.
Ma vediamo altri studi del XVII sec.

Mengoli, formatosi sotto l'influsso di Cavalieri, Torricelli e Gregorio di San Vincenzo, continuò le ricerche di questi ultimi sugli indivisibili, imparando a trattare i problemi attraverso un dispositivo la cui utilità cominciava ad apparire evidente: l'uso di serie infinite (in partic. le serie telescopiche). L'attenzione rivolta da Mengoli verso serie e prodotti infiniti rappresentava un importante passo verso futuri sviluppi della Matematica, ma i contemporanei ancora non erano pronti a seguire tale strada.

Vi furono molti tentativi di rettificazione di curve, con vari metodi. Uno di essi utilizzava gli incrementi infinitesimali di ascissa e ordinata:

$$d\,s = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$$

La Geometria analitica e l'Analisi infinitesimale sembravano dominare dunque il campo degli studi matematici del tempo, trovando un forte connubio.

Alla fine del secolo Wallis cominciò ad aritmetizzare la Geometria degli indivisibili, assegnando valori numerici agli infiniti indivisibili delle figure.

All'epoca cominciò ad essere frequente l'uso anche dell'induzione incompleta per generalizzare formule. Molte formule, valide per n intero si generalizzavano a valori frazionari o addirittura irrazionali.

James Gregory, scozzese, continuò l'approfondimento delle serie infinite. Fu il primo ad usare il termine "convergenza" e scoprì quarant'anni prima di Taylor lo sviluppo relativo.

Non si badava molto al rigore: era comune l'integrazione termine a termine (per es. Mercatore)

Tra i processi infiniti inventati nel XVII sec. occorre annoverare lo sviluppo in frazioni continue. Un italiano , Pietro Antonio Cataldi, aveva espresso in tale forma le radici quadrate. Successivamente altri matematici trovarono lo sviluppo per p.

Nel cammino tortuoso della storia del Calcolo, troviamo, immediatamente prima di Newton, suo discepolo, Isaac Barrow. Costui sviluppò un metodo praticamente identico a quello di Fermat.

Ma vediamo come impostarono il problema Leibnitz e Newton...

LEIBNITZ

Per trovare massimi e minimi, Fermat scriveva prima l'adequazione, poi divideva per $x - x_0$ e infine poneva $x = x_0$.
Tale modo di procedere era ostacolato dalla presenza dei radicali, che rendeva praticamente impossibile la divisione suddetta.
Leibnitz introdusse i differenziali di quantità dipendenti da più variabili mediante la tangente ed evitando ogni riferimento esplicito a quantità infinitesime: è però ovvio che i segmenti presi ad arbitrio a cui si riferiva possono essere infinitamente piccoli; è proprio questa proprietà che consente di dare regole di differenziazione e di legare i differenziali alla tangente.

Le potenzialità del nuovo metodo furono molteplici: applicazioni ai problemi di massimo/minimo, ricerca delle tangenti, ricerca di equazioni differenziali associate a curve, quadrature.
Riguardo a quest'ultimo aspetto, se *dy* era l'incremento della variabile *y*, allora la somma degli incrementi doveva ricostituire la *y*. Egli stesso introdusse il simbolo della "S" allungata:

$$\int$$

Inoltre Galileo e Leibnitz ritenevano che la continuità dei punti di una linea fosse dovuta alla loro densità: tra due qualsiasi ne esiste sempre un terzo.

NEWTON

- Newton concepiva le variabili come dipendenti dal tempo: grandezze "fluenti" x, y ecc... che ad ogni istante avevano una determinata velocità o "flussione", indicata con un punto sopra la lettera.
- In tal modo la tangente era legata al rapporto tra due flussioni.
- La flussione di una funzione di variabili era ottenuta con un calcolo simile a quello di Leibnitz, attribuendo a ciascuna variabile una variazione pari al prodotto della flussione per l'infinitesimo di tempo (indicato con il simbolo "o").

Ma Newton aggiunse alla sua analisi uno strumento estremamente potente: gli sviluppi in serie.

- Problemi di quadratura potevano essere risolti integrando termine a termine lo sviluppo in serie.
- Si potevano risolvere anche problemi di integrazione di equazioni differenziali.

Purtroppo nacque una pesante polemica tra Newton e Leibnitz sulla priorità della scoperta del Calcolo; tale polemica, unita alla preferenza "miope" dei matematici inglesi di adagiarsi sulla algoritmicità del metodo newtoniano rispetto a quello leibnitziano, isolò l'Inghilterra dallo sviluppo della ricerca matematica per oltre un secolo.

Incoraggiati dall'esempio di Newton, molti matematici non cercavano più di evitare i processi infiniti. C'è da dire, tuttavia, che il metodo di Newton, sebbene fosse un potente strumento algoritmico, non garantiva affatto la convergenza degli sviluppi in serie, i quali avevano per di più carattere locale.
Dopo pochi anni i continentali ottennero una tale quantità di risultati da eclissare completamente il metodo di Newton.

Rimaneva ancora da risolvere, in ogni modo, il problema dei fondamenti del calcolo infinitesimale, colmo di lacune dal punto di vista logico...

I processi infiniti, oltre a non avere ancora adeguato fondamento logico, davano luogo a una serie di questioni e paradossi, alcuni dei quali messi in evidenza fin dalla fine del XVII secolo:
- Cosa significava «incrementi evanescenti»?
- Esisteva un rapporto tra incrementi "svaniti"?
- Cosa significava "differenziali di ordine superiore"?
- Come dare fondamento alla convergenza, divergenza e confronto tra serie? (Si veda anche il paradosso della serie dei reciproci delle radici quadrate degli interi).
- Come dare fondamento alla Legge dei grandi numeri della probabilità? Come risolvere il paradosso di Pietroburgo?

Interessante la critica di Berkeley...

Berkeley criticava aspramente il metodo di Newton e criticava tutti coloro che si lamentavano della Rivelazione senza accorgersi delle inconsistenze dei metodi infinitesimali. Nel suo *The Analyst*:

- Criticava delle flussioni il fatto che si dovesse calcolare prima il rapporto incrementale (dunque $o \neq 0$) e poi considerare $o = 0$
- Si prendeva gioco dell'altra definizione newtoniana basata sulle "prime e ultime ragioni", che prevedeva invece la considerazione del rapporto non quando $o = 0$, né quando $o \neq 0$, ma nel momento stesso in cui o si annulla!

Rolle in un primo tempo criticò aspramente il calcolo infinitesimale, da lui descritto come una congerie di errori ingegnosi. La difesa che Varignon fece del nuovo ramo della Matematica, però, lo convinse. Varignon metteva in guardia, tuttavia, dall'usare serie infinite senza investigare il termine residuo. A proposito della natura dei differenziali, che considerava non costanti, ma variabili, scrisse:

«*L'Abate Galloys [...] sparge voce qui che voi* [rivolto a Leibnitz] *avete spiegato il differenziale o l'infinitamente piccolo intendendolo come una quantità molto piccola, ma costante e definita... Io, d'altra parte, ho chiamato una cosa infinitamente piccola, o il differenziale di una quantità, se tale quantità è inesauribile rispetto a quella cosa.*»

(cit. riportata da Boyer, pag. 501)

Il problema della convergenza delle serie dovette attendere ancora vari decenni prima di essere sistematizzato. Eulero utilizzava con molta disinvoltura le serie e riuscì ad ottenere una quantità notevole di risultati significativi. Ma il problema della convergenza sollevava vari paradossi. Oltre a quello già citato, vi è quello sollevato da Guido Grandi:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots = ?$

Alcune considerazioni sullo sviluppo di $1/(1+x)$ suggerivano che il valore in questione dovesse essere 1/2, ma raggruppando i termini della serie a coppie risultava $0 = 1/2$. Grandi paragonò questo al mistero della Creazione dal nulla, invadendo ingenuamente un campo epistemologicamente un po' diverso...

Nonostante l'estrema quantità di risultati importanti che riuscì ad ottenere, Eulero incappò anche in qualche errore sull'insieme di convergenza di serie di potenze. Molti risultati esatti venivano ottenuti, poi, non solo non curandosi dell'insieme di convergenza, ma estendendo alle serie di potenze alcuni risultati della teoria delle equazioni valide nel caso finito (es. della serie dei reciproci dei quadrati perfetti, che aveva tenuto occupati i Bernoulli per molto tempo).
Tra le curiosità, segnaliamo che trattava il simbolo dell'infinito, ∞, semplicemente come il reciproco dello zero.

Importanti considerazioni sulla natura degli infinitesimi furono fatte da D'Alembert. Criticava la disinvoltura con cui Eulero trattava i processi infiniti. Gli infinitesimi dovevano secondo lui essere trattati attraverso la nozione di "limite":
«*una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio, tra qualcosa o niente, è una pura chimera.*» (cit. da Boyer, pag. 521)

D'Alembert chiamava una quantità il limite di una seconda quantità (variabile) se quest'ultima si avvicinava alla prima così tanto che la differenza fosse inferiore a qualsiasi quantità data (senza effettivamente coincidere con essa).

Definiva in maniera analoga il limite di quantità infinitamente grandi. Definiva quantità infinitamente grandi di ordine superiore in maniera analoga a quanto fatto oggi.
D'Alembert rifiutava l'infinito attuale,: quando parlava di quantità infinitamente grandi pensava più a grandezze geometriche che alla teoria degli insiemi elaborata un secolo più tardi.

C'è da dire, però, che la mancanza di chiarezza di espressione sulla nozione di limite rese inaccettabile la stessa ai contemporanei.

Nel 1776 Waring formula quello che poi diventerà famoso come criterio di convergenza delle serie di Cauchy. Il linguaggio usato da Waring, infatti, era arido e stringato, ciò che impedì la diffusione della sua opera.

Verso la metà del secolo fu pubblicata anche l'opera di Simpson che conteneva l'approssimazioni di quadrature di curve mediante archi di parabola.

Nello stesso periodo venne dimostrata anche l'irrazionalità di π (Lambert) e di e (Eulero).

Lazare Carnot, vissuto a cavallo tra XVIII e XIX secolo, non considerava adeguati i metodi proposti fino ad allora (Newton, Leibnitz, D'Alembert). Nel 1797 uscirono le sue *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* che godettero di vasta popolarità, sebbene la situazione politica fosse turbolenta. Commenta Boyer (pagg. 557-558):

«*[...] Carnot, attraverso l'esame delle varie interpretazioni tra loro contrastanti, cercò di mostrare in che cosa consistesse il vero spirito della nuova analisi. [...] Egli trasse infatti la conclusione che "i veri principi metafisici" del calcolo infinitesimale fossero "i principi della compensazione degli errori"[...]: gli infinitesimi sono "quantées inappréciables" che, analogamente ai numeri immaginari, vengono introdotte soltanto allo scopo di facilitare i calcoli e vengono eliminate quando si raggiunge il risultato finale.*

"Equazioni imperfette" vengono rese "perfettamente esatte", nel calcolo infinitesimale, mediante l'eliminazione di quelle quantità, come gli infinitesimi di ordine superiore, la cui presenza possa dar luogo ad errori. All'obiezione che le quantità che tendono a zero o sono zero o non lo sono, Carnot replicava che "quelle che chiamiamo quantità infinitamente piccole non sono semplicemente quantità nulle qualsiasi, ma sono invece quantità nulle determinate da una legge di continuità che regola il loro rapporto".[...] I diversi metodi adottati nel calcolo infinitesimale, secondo l'opinione di Carnot, non erano altro che semplificazioni dell'antico metodo di esaustione, che per il loro tramite e in maniere diverse risultava ridotto a un conveniente algoritmo.»

Nonostante le proposte di Carnot ebbero scarso successo, tuttavia la popolarità di cui godette la sua opera alimentò quelle forti esigenze di rigore che caratterizzarono il XIX secolo.

Lagrange, nello stesso periodo, ritenne di poter eliminare limiti e infinitesimi (anche se poi continuò a usarli...) definendo la "funzione derivata n-esima nel punto a" il prodotto per n! del coefficiente dell'n-esimo termine dello sviluppo in serie di potenze della funzione.

Cosa significava, però, sviluppare in serie?
Come definire la sviluppabilità senza reintrodurre la nozione di limite?

Uno dei contributi di Cauchy al calcolo infinitesimale consistette nel soddisfare alla sempre più pressante esigenza di dare ad esso rigore logico.
Cauchy assunse come fondamentale il concetto di limite di D'Alembert, ma gli conferì una veste aritmetica dotata di maggiore precisione. Rinunciando a ogni ricorso alla Geometria, a infinitesimi o a velocità, formulò una definizione relativamente precisa di limite:

«*Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri*»

(Boyer, pag. 596)

Dunque, anziché definire l'infinitesimo come quantità fissa molto piccola, Cauchy lo definì come variabile dipendente:

«*Si dice che una quantità variabile diventa infinitamente*

piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente in maniera da convergere verso il limite zero.»
(Boyer, pag. 596)

Diede le definizioni sostanzialmente equivalenti a quelle moderne di derivata, differenziale e continuità. Diede nuova formulazione anche al concetto di integrale, come somma limite di un opportuno plurirettangolo.
Bolzano diede, parallelamente a Cauchy, definizioni molto simili.

Bolzano ebbe intuizioni sugli insiemi infiniti che anticiparono alcuni settori della Matematica successiva.
Scrisse i *Paradossi dell'infinito* nei quali mostrò:
- Il paradosso galileiano della corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei naturali e un suo sottoinsieme proprio era comune anche ad altri insiemi formati da infiniti elementi (es. y=2x in [0,1])
- Sembra che fin dal 1840 Bolzano si sia reso conto che l'infinità dei reali è di tipo diverso rispetto all'infinità degli interi. Era ben diverso il suo concetto di ordine di infinità tra insiemi rispetto all'ordine di infinità nel confronto tra insiemi, come facevano Cauchy e altri.

Sembra che tanto Gauss quanto Cauchy fossero ancora affetti dall'*horror infiniti*, negando con forza l'infinito attuale e completo.
Comunque l'opera di Bolzano fu, come si esprime Boyer, indegnamente trascurata dai contemporanei.
Intanto gli studi di Cauchy proseguivano nella sistematizzazione della nozione di convergenza per le serie.

Il XIX secolo vide anche uno sviluppo molto intenso della Geometria. In tale campo si trovò un paradosso simile a quello di Bolzano: si trovò una corrispondenza biunivoca tra punti interni ed esterni ad un cerchio dove l'interno conteneva "un punto in più", per così dire, rispetto all'esterno (Steiner, geometria di inversione per raggi vettori reciproci).
Sempre in Geometria vennero introdotti i punti all'infinito, o punti impropri (Poncelet, ma già suggeriti da Keplero e Desargues).

Il 1872 fu un anno significativo per il dibattito sulla definizione dei numeri reali. Anche la convergenza delle serie poneva seri problemi (serie di Fourier...) e i due argomenti sembravano collegati.
Già nel 1830 Bolzano aveva proposto una definizione di numero reale come limite di successioni di razionali.
Méray nel 1869 pose in evidenza come tentativi del genere andassero incontro, da Cauchy in poi, a una *petitio principii*: se si definisce il limite di una successione come un numero reale, non si può poi definire un numero reale come limite di una successione (di razionali).

Nel 1872 Méray stesso, Weierstrass, Heine, Cantor e altri lavorarono nella direzione nella quale le successioni convergenti che non convergevano verso nessun numero razionale venivano considerate come definienti numeri irrazionali.

Un metodo completamente diverso di affrontare lo stesso problema fu quello presentato da Dedekind nel suo famoso libro "La continuità e i numeri irrazionali", sempre nello stesso anno, metodo che oggi è quello più noto.

Citiamo Boyer (pag.644):

«*Dedekind aveva rivolto la sua attenzione al problema dei numeri irrazionali sin dal 1858 [...]. Egli era giunto alla conclusione che, per poter essere rigoroso, il concetto di limite doveva essere sviluppato facendo ricorso soltanto a nozioni aritmetiche, senza la consueta guida della geometria. Invece di cercare semplicemente una via d'uscita dal circolo vizioso di Cauchy, Dedekind si chiese [...] in che cosa una grandezza geometrica continua si distinguesse dai numeri razionali*»; al contrario di Galileo e Leibnitz, «*Dedekind giunse alla conclusione che l'essenza della continuità di un segmento non è dovuta ad una vaga compattezza dei suoi punti, ma a una proprietà esattamente contraria, ossia alla peculiare natura della divisione del segmento in due parti mediante un punto giacente sul segmento stesso*».

L'assioma di continuità che allora caratterizzerà i reali rispetto ai razionali è:

I numeri razionali siano suddivisi in due classi A e B non vuote tali che ogni numero di A sia minore di ogni numero di B. Per ognuna di tali suddivisioni **esiste** *un numero reale che non è superato da alcun elemento di A e non supera alcun elemento di B.*

Dunque la Geometria aveva suggerito la via per giungere ad una adeguata definizione del concetto di continuità, ma alla fine essa veniva esclusa dalla formale definizione di tale concetto, permettendo finalmente di dimostrare rigorosamente i teoremi fondamentali concernenti i limiti.

Heine, sempre nel 1872, sotto l'influenza delle lezioni di Weierstrass e superando l'imprecisione linguistica di Cauchy, definiva così il limite di una funzione $f(x)$ in un punto x_0:

Se, data una qualsiasi grandezza ε, *esiste una* η_0 *tale che per* $0 < \eta < \eta_0$ *la differenza* $f(x_0 \pm \eta) - L$ *è minore di* ε *in valore assoluto, allora* L *è il limite di* $f(x)$ *per* $x = x_0$

Afferma a tal proposito Boyer (pag. 645):
«*In questa fredda e precisa definizione non viene fatto alcun cenno a entità che fluiscono generando grandezze di dimensione superiore, non si fa alcun ricorso a punti e linee in movimento, né si parla di quantità che divengono infinitamente piccole. Tale definizione non contiene altro che numeri reali [...].*

*Il linguaggio e il simbolismo di Weierstrass e di Heine estromisero dal calcolo infinitesimale la nozione di variabilità e resero superfluo il consueto, persistente ricorso a quantità infinitesime fisse. Era veramente iniziata l'*età del rigore*, durante la quale i vecchi dispositivi euristici e intuitivi furono rimpiazzati da concetti logicamente precisi e criticamente vagliati*».

L. Russo afferma (pag. 448):
«*Nel moderno calcolo infinitesimale le "persone dalla mentalità pratica" consideravano direttamente quantità "infinite" o "infinitesime", poiché non erano in grado di ottenere dimostrazioni rigorose usando solo quantità finite, come abbiamo visto fare a Euclide e ad Archimede e come farà di nuovo l'analisi matematica contemporanea. Fu allora che, a opera sempre di matematici con "mentalità pratica", nacque*

l'idea che gli "Antichi" non avessero capito l'infinito. Quest'idea è sopravvissuta, nelle concezioni di molti storici della matematica, al recupero del rigore dei metodi infinitesimali avvenuto alla fine dell'Ottocento».

Negli stessi anni ci fu anche un'altra rivoluzione ad opera di Cantor. L'infinito attuale era ancora rifiutato da molti matematici e Cantor stesso pagò di persona l'originalità delle sue idee (Kronecker ostacolò Cantor per l'ottenimento di una cattedra a Berlino).
Cantor andò ben oltre anche rispetto a Dedekind, il quale vide nei paradossi di Bolzano non un'anomalia, ma una proprietà universale degli insiemi infiniti, tanto da assumerla come definizione:

Un sistema S si dice infinito quando è simile a una propria parte; in caso contrario S si dice un insieme finito.

Cantor si rese conto che non tutti gli insiemi infiniti erano simili.
Definì il concetto di "potenza" di un insieme e mostrò come poter costruire una gerarchia di insiemi infiniti a seconda della loro potenza o cardinalità. Mostrò, in particolare, che l'insieme di tutti i numeri reali ha potenza maggiore rispetto all'insieme dei naturali.
Dai teoremi di Cantor discendeva tutta una serie di conseguenze così apparentemente paradossali che molti editori esitavano a pubblicare gli articoli di Cantor.

Grazie ad un lavoro di Hallett (*Cantorian set theory and limitation of size*, Clarendon Press, Oxford 1996) è ormai storicamente certo come Cantor distinguesse fra tre generi d'infinito, con una distinzione che ha molti punti in comune con quella di San Tommaso, sebbene quest'ultimo la concepisse per considerazioni metafisiche:

- Infinito in potenza
- Infinito transfinito
- Infinito Assoluto che, anche per Cantor, era solo Dio.